

УДК 517.544

## ЗАДАЧА РИМАНА НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА $O_{A^0B}$

*Н.А. Бариева, И.А. Бикчантаев*

### Аннотация

В статье И.А. Бикчантаева (Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31) были получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности. В настоящей работе этот результат обобщается на случай двулистной римановой поверхности класса  $O_{A^0B}$ .

**Ключевые слова:** краевые задачи, римановы поверхности.

### 1. Предварительные сведения и результаты. Постановка задачи

**1.1.** Введем следующие термины и обозначения (см. [1]). Множество  $M$  на римановой поверхности или на плоскости называется  $AB$ -устранимым, если для некоторой окрестности  $U$  множества  $M$  любая аналитическая и ограниченная в  $U \setminus M$  функция аналитически продолжима в  $U$ . Пусть  $AB(R)$  – семейство аналитических и ограниченных функций на римановой поверхности  $R$ ;  $O_{AB}$  – класс римановых поверхностей, на которых не существует непостоянных  $AB$ -функций;  $SO_{AB}$  – семейство римановых поверхностей с краем  $\{\bar{R}\}$  такое, что каждая  $AB$ -функция  $f$  на  $\bar{R}$  с  $\Re f = 0$  на  $\partial R$  сводится к постоянной; как известно (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]),  $\bar{R}$  принадлежит  $SO_{AB}$  тогда и только тогда, когда ее дубль относительно края  $\partial R$  принадлежит  $O_{AB}$ . Областью с краем  $\bar{D} = D \cup \partial D$  будем называть объединение области  $D$  на  $R$  с аналитической жордановой относительной границей  $\partial D$ . Через  $O_{A^0B}$  обозначим класс римановых поверхностей  $R$  таких, что каждая подобласть с краем  $\bar{R}'$  на  $R$  принадлежит  $SO_{AB}$ . Имеет место строгое включение  $O_{A^0B} \subset O_{AB}$  (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]).

**1.2.** В настоящей статье мы будем считать, что рассматриваемая риманова поверхность  $R$  принадлежит классу  $O_{A^0B}$  и ее род равен бесконечности.

**Предложение 1.** Пусть  $\bar{D}$  – область с компактным краем на римановой поверхности  $R$  класса  $O_{A^0B}$ . Тогда  $\bar{D}$  может быть вложена в риманову поверхность с краем  $\bar{V}$  такую, что  $\partial V = \partial D$ , множество  $V \setminus D$   $AB$ -устраσιμο и любая ее подобласть конечного рода с компактной относительной границей относительно компактна. Если род области  $D$  конечен, то  $\bar{V}$  компактна.

**Доказательство.** Если род области  $D$  конечен, то требуемый результат вытекает из того, что  $R \in O_{A^0B}$ , и теоремы из [1, гл. II, § 3, п. 15A], примененной к дублю  $\bar{D}$  относительно края  $\partial D$ . Пусть теперь род области  $D$  бесконечен. Пусть  $\{\bar{D}_n\}$  – исчерпание  $\bar{D}$  областями с краем такими, что край  $\partial D_n$  компактен и содержит  $\partial D$ ,  $\bar{D}_n \subset D_{n+1} \cup \partial D$ , род поверхности  $D_n$  конечен и все компоненты  $D \setminus \bar{D}_n$  – области рода бесконечность. Каждая  $\bar{D}_n$  вложима в компактную риманову поверхность с краем  $\bar{V}_n$ , причем ее род равен роду  $\bar{D}_n$ ,  $\partial V_n = \partial D_n$  и множество  $V_n \setminus D_n$

является  $AB$ -устранимым. Тогда область  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  удовлетворяет условиям предложения. Действительно, то, что  $V \setminus D$   $AB$ -устранимо, следует из определения поверхности  $V$ . Пусть  $V'$  – область на  $V$ , род которой конечен и относительная граница  $\partial V'$  компактна. При достаточно большом  $n$  справедливо вложение  $V_n \supset \supset \partial V'$ . Покажем, что  $V' \subset V_n$ . Если допустить противное, то найдется точка  $q \in V' \setminus V_n$ . Так как множество  $V \setminus V_n$  не содержит точек относительной границы области  $V'$ , то  $V'$  должна включать в себя компоненту множества  $V \setminus V_n$ , содержащую точку  $q$ . Но род последней, а, следовательно, и род  $V'$ , равен бесконечности. Полученное противоречие показывает, что  $V' \subset V_n$  и  $\overline{V'}$  как замкнутое подмножество компактного множества  $\overline{V_n}$  компактно. Предложение доказано.  $\square$

Доказанное утверждение справедливо также и в том случае, когда относительная граница области  $D$  является пустым множеством, то есть  $D = R$ . Соответствующую этому случаю область  $V$  обозначим через  $R^*$ .

**1.3.** Если  $f$  – мероморфная функция на  $D$ , ограниченная вблизи идеальной границы, то она аналитически продолжима в  $V$ ; это продолжение условимся обозначать той же буквой.

Предположим теперь, что на  $R$  существует мероморфная функция  $z$ , принимающая каждое значение  $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$  не более двух раз с учетом кратности. Тогда  $R$  может быть реализована в виде накрывающей  $(R, z)$  расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ . Продолженная аналитически на  $R^*$  функция  $z$  определяет безграничную накрывающую  $(R^*, z)$  для области  $z(R^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$ , на которой существует отличное от тождественного преобразование наложения  $j_{R^*}$ , то есть конформный автоморфизм поверхности  $R^*$ , удовлетворяющий соотношению  $z(j_{R^*}(q)) = z(q)$  для всех  $q \in R^*$ .

Род поверхности  $V$ , очевидно, равен роду  $D$  и является конечным в том и только в том случае, если накрывающая  $(V, z)$  имеет конечное число точек ветвления.

**Предложение 2.** Пусть  $U$  – область на  $R^*$  рода бесконечность с компактной относительной границей  $\partial U$ ,  $f$  – мероморфная функция в  $U$ , ограниченная вблизи идеальной границы области  $U$ . Тогда  $f$  принимает одно и то же значение в точках области  $U$ , имеющих одинаковые проекции при отображении  $z : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ .

**Доказательство.** Пусть  $U_0 \subset U$  – область с теми же свойствами, что и  $U$ , кроме того,  $j_{R^*}(U_0) = U_0$  и функция  $f$  голоморфна в  $\overline{U_0}$ . Множество  $M$  проекций точек ветвления накрывающей  $(U_0, z)$  на  $\overline{\mathbb{C}}$  бесконечно и множество  $\mu$  его предельных точек совпадает с множеством  $\partial(z(U_0)) \setminus z(\partial U_0)$ . Пусть  $W$  – область на  $\overline{\mathbb{C}}$ , содержащая  $z(U_0)$  и такая, что  $\partial W = z(\partial U_0)$ . Так как относительная граница  $\partial U_0$  области  $U_0$  компактна, то  $\partial W = z(\partial U_0)$  не содержит точек множества  $\mu$ . Поэтому  $\overline{M} = M \cup \mu \subset W$ . Положим  $f_0(z) := (f(j_{R^*}(q(z))) - f(q(z)))^2$ , где  $q(z)$  – точка области  $U_0$  такая, что  $z(q(z)) = z$ . Функция  $f_0$  есть  $AB$ -функция в  $z(U_0)$ , исчезающая в точках множества  $M$ . Множество  $W \setminus z(U_0)$  не имеет внутренних точек. Действительно, если точка  $a$  вместе со своей окрестностью принадлежит  $W \setminus z(U_0)$ , то непостоянная функция  $1/(z - a)$  есть  $AB$ -функция на  $R$ , что невозможно. Поэтому  $W \setminus z(U_0) = \mu$ . Следовательно,  $f_0$  голоморфно продолжима в область  $W$  и обращается в нуль на множестве  $\overline{M} = M \cup \mu \subset W$ . По внутренней теореме единственности  $f_0 = 0$ . Предложение доказано.  $\square$

**1.4.** Пусть  $\Gamma$  – кусочно-гладкий контур на  $R$ ,  $T$  – множество узлов контура  $\Gamma$ . Будем предполагать, что  $z(\Gamma)$  также есть кусочно-гладкий контур на  $\mathbb{C}$ , причем  $\Gamma$  и  $z(\Gamma)$  не имеют точек возврата. Ориентацию на  $\Gamma$  выберем так, чтобы

на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на  $z$ -плоскость  $\mathbb{C}$ , ориентация контура была согласована. Тогда ориентацию  $z(\Gamma)$  можно определить как индуцированную отображением  $z : \Gamma \rightarrow z(\Gamma)$ .

Зададим дивизор  $D$ , носитель которого лежит в  $R \setminus \Gamma$ , и функции  $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$  и  $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $-1 < \lambda < 0$ , причем  $G(t) \neq 0$ ,  $t \in \Gamma$  (мы используем функциональные пространства  $H_{\mu,(\nu)}(\Gamma, T)$  и  $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ , введенные на плоских контурах А.П. Солдатовым [2] и распространенные в [3] на контуры, расположенные на римановой поверхности). К множеству  $T$  отнесем все узлы контура  $\Gamma$ , все точки ветвления накрывающей  $(R, z)$ , лежащие на  $\Gamma$ , все точки разрыва коэффициентов  $G$  и  $g$ , все точки  $t \in \Gamma$  такие, что  $z(t)$  есть узловая точка контура  $z(\Gamma)$ ; в него можно включить также любое конечное число других точек контура  $\Gamma$ . Не умаляя общности, будем считать, что бесконечно удаленная точка не лежит на  $z(\Gamma) \cup z(\text{supp } D)$ .

Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

*Найти кусочно-мероморфную функцию  $F$  на  $R$  с линией скачков  $\Gamma$ , кратную дивизору  $1/D$  и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности  $R$ , предельные значения которой на  $\Gamma$  принадлежат классу  $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $-1 < \lambda < 0$ , и удовлетворяют соотношению*

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

## 2. Случай, когда задача Римана сводится к плоской

Пусть  $\Gamma$  – контур на  $R$  такой, что каждая компонента множества  $R \setminus \Gamma$  имеет род, равный бесконечности.

**2.1.** Через  $q(z)$  будем обозначать поднятие точки  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  на накрывающую  $(R^*, z)$ . Из [3] и предложений 1 и 2 следует, что если  $F$  – решение задачи (1), то функция  $F$  аналитически продолжима на  $R^* \setminus \Gamma$ , принимает одинаковые значения в точках накрывающей  $(R, z)$ , принадлежащих одной компоненте  $R \setminus \Gamma$  и имеющих одинаковую проекцию на  $z$ -плоскость; при этом функция  $f(z) = F(q(z))$  однозначна в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(\Gamma)$  и аналитически продолжима в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ , где  $\gamma$  – множество точек на  $z(\Gamma)$ , имеющих два прообраза при отображении  $z : \Gamma \rightarrow z(\Gamma)$  (точки ветвления накрывающей  $(R, z)$  при этом считаются дважды).

Определим в  $\overline{\mathbb{C}}$  дивизор  $\Delta$ , полагая  $\text{ord}_{z(q)} \Delta = \min \{ \text{ord}_q D, \text{ord}_{j_{R^*}(q)} D \}$  при  $j_{R^*}(q) \neq q$  и  $\text{ord}_{z(q)} \Delta = \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ord}_q D \right\rfloor$  при  $j_{R^*}(q) = q$ , где  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает целую часть числа.

**2.2.** Если множество  $\gamma$  является  $AB$ -устранимым, то функция  $f$  аналитически продолжима на всю комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и является рациональной функцией, кратной дивизору  $1/\Delta$ . Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции  $G$  и  $g$  удовлетворяют соотношению  $g(t) = (1 - G(t)) f(z(t))$ ,  $t \in \Gamma$ , где  $f$  – рациональная функция, кратная дивизору  $1/\Delta$ . Если это соотношение выполняется, то функция  $F(q) = f(z(q))$  является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть  $\gamma$  является  $AB$ -устранимым множеством. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы функции  $G$  и  $g$  были связаны соотношением  $g(t) = (1 - G(t)) f(z(t))$ ,  $t \in \Gamma$ , где  $f$  – рациональная функция, кратная дивизору  $1/\Delta$ . При этом любое решение задачи (1) имеет вид  $F = f \circ z$ .*

Из этой теоремы вытекает, что:

- 1) при  $\text{ord } \Delta < 0$  задача (1) имеет решение (равное нулю) только при  $g = 0$ ;
- 2) если  $G = 1$ , то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы  $g = 0$ ; при этом число линейно независимых решений задачи (1) равно  $\max\{0, \text{ord } \Delta + 1\}$ ;
- 3) если  $G(t) \neq 1$ , то задача (1) не может иметь более одного решения.

**2.3.** Предположим теперь, что множество  $\gamma$  не является  $AB$ -устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через  $\Gamma_1$  кривую на  $R^* \supset R$ , гомеоморфную  $z(\Gamma)$  относительно отображения  $z : \Gamma_1 \rightarrow z(\Gamma)$ . Тогда  $\Gamma_2 := j_{R^*}(\Gamma_1)$  тоже гомеоморфна  $z(\Gamma)$  относительно отображения  $z$  и  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = z^{-1}(z(\Gamma))$ . Через  $\rho_k : z(\Gamma) \rightarrow \Gamma_k$ ,  $k = 1, 2$ , обозначим гомеоморфизм  $z(\Gamma)$  на  $\Gamma_k$  такой, что  $z(\rho_k(\xi)) = \xi$  при  $\xi \in z(\Gamma)$ . Ориентацию на  $\Gamma_k$  выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании  $z : R^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ориентация на  $z(\Gamma)$  совпадала с уже выбранной в п. 1.4.

Доопределим  $G$  и  $g$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , полагая  $G(t) = 1$ ,  $g(t) = 0$  в точках  $t$ , не принадлежащих  $\Gamma$ . Тогда функция  $f$  на  $z(\Gamma)$  удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi))f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad \Delta^{-1}|(f), \quad k = 1, 2. \quad (2_k)$$

Здесь функции  $G(\rho_k(\xi))$  принадлежат классу  $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma), z(T))$ , где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) \neq \tau \\ \frac{1}{2}\mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) = \tau. \end{cases}$$

Функции  $g(\rho_k(\xi))$  принадлежат классу  $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$ , где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \min\{\lambda(\tau), \lambda(j(\tau))\}, & \tau, j(\tau) \in T, \quad j(\tau) \neq \tau, \\ \lambda(\tau), & \tau \in T, \quad j(\tau) \notin T, \\ \frac{1}{2}\lambda(\tau), & j(\tau) = \tau \in T. \end{cases}$$

Решение задачи (2<sub>k</sub>) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на  $z(\Gamma)$  принадлежат классу  $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$ .

Таким образом, функция  $f$  является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре  $z(\Gamma)$ . Из предположения о том, что каждая компонента множества  $R \setminus \Gamma$  имеет род, равный бесконечности, следует, что каждая компонента множества  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  содержит бесконечное число проекций точек ветвления накрывающей  $(R^*, z)$ . На множество  $z(\Gamma) \setminus \gamma$  функция  $f$  аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач (2<sub>1</sub>) и (2<sub>2</sub>) достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторых точек  $z_k \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$ , выбранных по одной в каждой компоненте множества  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

**2.4.** Если  $G \circ j_{R^*} = G$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , то, поскольку  $F \circ j_{R^*} = F$ , для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы  $g \circ j_{R^*} = g$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Тогда задачи (2<sub>1</sub>) и (2<sub>2</sub>) совпадают. Если  $f$  – решение задачи (2<sub>k</sub>), то  $F = f \circ z$  будет решением задачи (1).

Обозначим через  $X(z)$  каноническую функцию задачи (2<sub>k</sub>), предельные значения которой на  $z(\Gamma)$  принадлежат классу  $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$  и имеющую максимально возможный порядок  $\varkappa$  на бесконечности. Тогда при  $\varkappa + \text{ord } \Delta \geq -1$  задача

(2<sub>k</sub>) разрешима для любой функции  $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $-1 < \lambda < 0$ , и ее общее решение имеет вид

$$f(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi)) d\xi}{X^+(\xi)(\xi - z)} + X(z)\delta(z), \quad (3)$$

где  $\delta$  – произвольная рациональная функция, кратная дивизору  $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$ .

При  $\varkappa + \text{ord } \Delta < -1$  необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2<sub>k</sub>), а, следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi) d\xi}{X^+(\xi)} = 0, \quad j = 1, \dots, -\varkappa - \text{ord } \Delta - 1, \quad (4)$$

где  $\omega_j$  – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору  $\Delta\infty^{\varkappa+2}$ . При выполнении условий (4) задача (2<sub>k</sub>) имеет единственное решение вида (3) с  $\delta = 0$ .

Условия (4) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_k} g\theta_j = 0, \quad j = 1, \dots, -\varkappa - \text{ord } \Delta - 1, \quad (5)$$

где  $\theta_j(t) = (X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$ . Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q) = \frac{X(z(q))}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap \Gamma_k} \frac{g(t) dz(t)}{X^+(z(t))(z(t) - z(q))} + X(z(q))\delta(z(q)). \quad (6)$$

В формулах (5) и (6)  $k$  может принимать любое из значений 1 или 2.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma$  имеет положительную линейную меру и коэффициент  $G$  задачи (1) удовлетворяет соотношению  $G \circ j_{R^*} = G$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы функция  $g$  удовлетворяла условиям  $g \circ j_{R^*} = g$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  и (5). При выполнении этих условий общее решение задачи (1) имеет вид (6), где  $\delta$  – произвольная рациональная функция, кратная дивизору  $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$ . Однородная задача (1) имеет  $l = \max\{0, \text{ord } \Delta + \varkappa + 1\}$  линейно независимых решений.

**2.5.** Пусть  $\gamma$  – такое же, как в предыдущем пункте. Будем предполагать, что  $G \circ j_{R^*} \neq G$ . Ясно, что при этом однородная задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция  $f$  является решением одновременно двух различных краевых задач Римана (2<sub>1</sub>) и (2<sub>2</sub>). Обозначим через  $X_k(z)$  каноническую функцию (того же класса, что и в п. 2.4) задачи (2<sub>k</sub>),  $\varkappa_k = \text{ord}_\infty X_k(z)$ . При  $\varkappa_k + \text{ord } \Delta \geq -1$  задача (2<sub>k</sub>) безусловно разрешима и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z) = \frac{X_k(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi)) d\xi}{X_k^+(\xi)(\xi - z)} + X_k(z)\delta_k(z), \quad (7)$$

где  $\delta_k(z)$  – произвольная рациональная функция, кратная дивизору  $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$ .

При  $\varkappa_k + \text{ord } \Delta < -1$  для разрешимости задачи  $(2_k)$  необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)} \omega_{kj}(\xi) d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1, \quad (8)$$

где  $\omega_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1$ , – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору  $\Delta \infty^{\varkappa_k+2}$ . Полагая  $\theta_{kj}(t) = \omega_{kj}(z(t)) [X_k^+(z(t))]^{-1} dz(t)$ , условия (8) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_k} g \theta_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

При выполнении условий (9) задача  $(2_k)$  имеет единственное решение вида (7) с  $\delta_k = 0$ . Для того чтобы функции  $f_k$  определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство  $f_1 = f_2$ . В силу сказанного в п. 2.3 для этого достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторых точек  $z_m \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$ ,  $m = 1, 2, \dots, l$ , принадлежащих различным компонентам множества  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , где  $l$  – число компонент множества  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

Пусть  $z_m$  – точка из  $\mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$ , в которой функции  $X_k$  и  $f_k$  голоморфны. Функцию  $X_k(z)/2\pi i X_k^+(\eta)(\eta - z)$  разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_m$ :

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X_k^+(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kjm}(\eta)(z - z_m)^j.$$

Пусть  $\delta_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \varkappa_k + \text{ord } \Delta + 1$ , – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору  $\Delta^{-1} \infty^{-\varkappa_k}$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда

$$X_k(z) \delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\varkappa_k + \text{ord } \Delta + 1} a_{kn} X_k(z) \delta_{kn}(z),$$

где  $a_{kn}$  – комплексные числа. Разлагая функции  $X_k \delta_{kn}$  в ряд Тейлора, имеем:

$$X_k(z) \delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knjm}(z - z_m)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций  $f_1$  и  $f_2$ , получим соотношения, эквивалентные равенству  $f_1 = f_2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1} a_{1n} a_{1njm} - \sum_{n=1}^{\varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1} a_{2n} a_{2njm} = \\ = - \int_{z(\Gamma)} (g(\rho_1(\eta)) c_{1jm}(\eta) - g(\rho_2(\eta)) c_{2jm}(\eta)) d\eta, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим  $l_1 = \max\{0, \varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1\}$ ,  $l_2 = \max\{0, \varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1\}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1101} & a_{1201} & \dots & a_{1l_1 01} & -a_{2101} & -a_{2201} & \dots & -a_{2l_2 01} \\ a_{1102} & a_{1202} & \dots & a_{1l_1 02} & -a_{2102} & -a_{2202} & \dots & -a_{2l_2 02} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{110l} & a_{120l} & \dots & a_{1l_1 0l} & -a_{210l} & -a_{220l} & \dots & -a_{2l_2 0l} \\ a_{1111} & a_{1211} & \dots & a_{1l_1 11} & -a_{2111} & -a_{2211} & \dots & -a_{2l_2 11} \\ a_{1112} & a_{1212} & \dots & a_{1l_1 12} & -a_{2112} & -a_{2212} & \dots & -a_{2l_2 12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{111l} & a_{121l} & \dots & a_{1l_1 1l} & -a_{211l} & -a_{221l} & \dots & -a_{2l_2 1l} \\ a_{1121} & a_{1221} & \dots & a_{1l_1 21} & -a_{2121} & -a_{2221} & \dots & -a_{2l_2 21} \\ a_{1122} & a_{1222} & \dots & a_{1l_1 22} & -a_{2122} & -a_{2222} & \dots & -a_{2l_2 22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{112l} & a_{122l} & \dots & a_{1l_1 2l} & -a_{212l} & -a_{222l} & \dots & -a_{2l_2 2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{jm}(t) = \begin{cases} -c_{1jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ c_{2jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_{01}(t), \dots, \alpha_{0l}(t), \alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1l}(t), \alpha_{21}(t), \dots, \alpha_{2l}(t), \dots)^t =: (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots)^t, \\ a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2})^t.$$

Тогда система (10) запишется в виде

$$Aa = \int_{\Gamma} g\alpha. \quad (11)$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг  $r$  матрицы  $A$  должен быть равен числу неизвестных  $a_{kn}$ , то есть  $r = \max\{0, \varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1\} + \max\{0, \varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1\}$ .

Пусть  $B$  – невырожденная квадратная матрица порядка  $r$ , составленная из строк матрицы  $A$  с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_r$  ( $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ ),  $B_j$  – квадратная матрица порядка  $r+1$ , составленная из  $r+1$  строк расширенной матрицы  $\left(A, \int_{\Gamma} g\alpha\right)$  с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_r, j$ . Тогда

$$\det B_j = \int_{\Gamma} g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^r B_{j,j_n} \alpha_{j_n} + B_{j,j} \alpha_j,$$

$B_{j,k}$  – алгебраическое дополнение элемента  $\int_{\Gamma} g\alpha_k$  матрицы  $B_j$ ; очевидно,  $B_{j,j} = \det B \neq 0$ . Если  $j$  принимает одно из значений  $j_1, j_2, \dots, j_r$ , то  $\beta_j = 0$ . Условия разрешимости системы (10) (или (11)) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \quad (12)$$

Совокупность условий (9) и (12) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством  $F(q) = f_k(z(q))$ , где функция  $f_1 = f_2$  определена формулой (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma$  имеет положительную линейную меру и коэффициент  $G$  задачи (1) удовлетворяет неравенству  $G(j_{R^*}(t)) \neq G(t)$ ,  $t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Тогда для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (9) и (12). При их выполнении задача (1) имеет единственное решение, определяемое равенством  $F = f_k \circ z$ , где совпадающие между собой функции  $f_k$ ,  $k = 1, 2$ , определяются равенством (7).

### 3. Случай произвольного кусочно-гладкого контура

Пусть теперь  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур на  $R$ , определенный в п. 1.4.

**3.1.** Обозначим через  $E$  область на  $R$ , обладающую следующими свойствами:

- 1) род области  $E$  конечен;
- 2) все компоненты множества  $R \setminus E$  имеют род, равный бесконечности;
- 3)  $E \supset \Gamma$ ;
- 4) относительная граница  $\partial E$  множества  $E$  состоит из конечного и четного числа компонент, каждая из которых есть аналитическая дуга, гомеоморфная окружности и отображающаяся взаимнооднозначно в  $\mathbb{C}$  функцией  $z : R \rightarrow \mathbb{C}$ ;
- 5)  $\partial E$  не содержит точек ветвления накрывающей  $(R, z)$ ;
- 6) над каждой компонентой множества  $z(\partial E)$  лежат две компоненты  $\partial E$ .

Пусть  $E^* = E^* \cup \partial E^*$  ( $\subset R^*$ ) – компактная риманова поверхность с краем такая, что  $E$  конформно эквивалентна области (которую мы отождествим с  $E$ ) на  $E^*$ , причем  $\partial E^* = \partial E$  и множество  $E^* \setminus E$  является  $AB$ -устранимым. Для римановой поверхности  $R \in O_{A^0B}$  такая поверхность  $E^*$  существует согласно предложению 1.

В силу  $AB$ -устранимости множества  $E^* \setminus E$  функцию  $z$  можно аналитически продолжить в  $E^*$ . Таким образом,  $(E^*, z)$  становится безграничной двулистной накрывающей для области  $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Множество  $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$  состоит из конечного числа  $m \geq 1$  односвязных областей, число которых совпадает с числом компонент множества  $R \setminus E$ . Образует гиперэллиптическую поверхность  $S \supset \overline{E^*}$ , которая получается приклеиванием к каждой компоненте  $\partial E^*$  соответствующей компоненты множества  $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$ ; при этом каждая компонента множества  $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$  берется в двух экземплярах и приклеивается к двум компонентам  $\partial E^*$ , имеющим одинаковую проекцию, причем точка  $p \in \partial E^*$  отождествляется с соответствующей точкой  $z(p) \in \partial(z(E^*))$ .

Обозначим через  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2h + 2$ ,  $0 \leq h < \infty$ , точки ветвления накрывающей  $(E^*, z)$ , где  $h$  – род области  $E^*$ . Тогда  $(S, z)$  есть гиперэллиптическая поверхность рода  $h$ , определяемая уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k), \quad (13)$$

где  $r_k = z(\alpha_k)$ . Через  $E_0$  обозначим область на  $S$ , являющуюся полным прообразом области  $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$  относительно отображения  $z : S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Ясно, что  $E_0$  содержит все точки ветвления накрывающей  $(S, z)$  и существует конформный гомеоморфизм  $\alpha : E_0 \rightarrow E^*$  такой, что  $z \circ \alpha = z$  и  $\alpha \circ j_S = j_{R^*} \circ \alpha$ . Множество  $S \setminus E_0$



состоит из  $2m$  односвязных компонент  $E_1^i$  и  $E_2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , причем  $j_S(E_1^i) = E_2^i$ ,  $j_S(E_2^i) = E_1^i$ . Отображение  $z : E_k^i \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через  $\rho_k^i : z(E_k^i) \rightarrow E_k^i$ . Очевидно,  $\rho_2^i = j_S \circ \rho_1^i$ ,  $\rho_1^i = j_S \circ \rho_2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Положим  $\Gamma_0 = \alpha^{-1}(\Gamma)$  и определим на  $\Gamma_0$  ориентацию, индуцированную отображением  $\alpha^{-1} : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ . Пусть  $F$  – решение задачи Римана (1). Эта функция аналитически продолжима в  $R^* \setminus \Gamma$ . Легко видеть, что  $F \circ j_{R^*} = F$  в  $R^* \setminus E^*$ . Поэтому на  $S$  определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q) = \begin{cases} F(\alpha(q)), & q \in E_0, \\ F(p), \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \end{cases}$$

с линией скачков  $\Gamma_0$ . Определим на  $S$  дивизор  $D_0$ , полагая

$$\text{ord}_q D_0 = \begin{cases} \text{ord}_{\alpha(q)} D, & q \in E_0, \\ \min \{ \text{ord}_p D, \text{ord}_{j_{R^*}(p)} D \}, \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \quad j_{R^*}(p) \neq p, \\ \left[ \frac{1}{2} \text{ord}_p D \right], \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \quad j_{R^*}(p) = p. \end{cases}$$

Положим  $T_0 = \alpha^{-1}(T)$  и доопределим на  $T_0$  функцию  $\lambda$ , полагая  $\lambda|_{T_0} = \lambda \circ \alpha|_{T_0}$ . Функция  $F_0$  мероморфна в  $S \setminus \Gamma_0$ , кратна дивизору  $1/D_0$ , а ее предельные значения на  $\Gamma_0$  принадлежат классу  $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$  и удовлетворяют соотношению

$$F_0^+(t) = G(\alpha(t))F_0^-(t) + g(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma_0. \quad (14)$$

Кроме того, в  $S \setminus E_0$  она удовлетворяет соотношению

$$F_0 \circ j_S = F_0. \quad (15)$$

Функции  $G \circ \alpha$  и  $g \circ \alpha$  принадлежат классам  $H_{\mu, (\mu)}(\Gamma_0, T_0)$  и  $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$  соответственно.

Существует взаимнооднозначное соответствие между точками  $q$  поверхности  $S$  и парами чисел  $(z, w) = (z(q), w(z(q)))$ , связанными соотношением (13). Точку  $q$  обычно отождествляют с парой  $(z, w)$ . Тогда точке  $j_S(q)$  соответствует пара  $(z, -w)$ . Точке ветвления  $\alpha_k$  соответствует пара  $(r_k, 0)$ .

Выберем на  $S$  канонические циклы  $\{a_k, b_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, h$ , как в статье [4]. Обозначим через  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , комплексно нормированный (относительно выбранных циклов) базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на  $S$  и через  $\omega_{qq_0}$  – нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши (см. [3, 4]).

Положим

$$X(q) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) \right), \quad q \in S.$$

Нули и бесконечности функции  $X(q)$  образуют квазидивизор  $(X) = \tau_1^{\varkappa_1} \tau_2^{\varkappa_2} \dots \tau_r^{\varkappa_r}$ , где  $\tau_k = \alpha^{-1}(t_k)$ ,  $t_k \in T$ , – узлы линии  $\Gamma_0$ ,  $\varkappa_k$  – числа, определяемые коэффициентом  $G$  и выбором ветви функции  $\ln G(\alpha(t))$  (см. [4]). Положим  $\varkappa = \sum_{k=1}^r [\varkappa_k - \lambda(\tau_k)]$ ,

где  $[\ ]$  означает целую часть числа. Число  $\varkappa$ , не зависящее от выбора ветви  $\ln G \circ \alpha$ , назовем индексом коэффициента задачи (14) в классе  $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$ . Положим  $A = t_1^{[\varkappa_1 - \lambda(\tau_1)]} t_2^{[\varkappa_2 - \lambda(\tau_2)]} \dots t_r^{[\varkappa_r - \lambda(\tau_r)]}$ ,  $B = (q')^h q_1^{-1} \dots q_h^{-1}$ , где  $q' \in S$  – произвольно

фиксированная точка, не совпадающая с  $q_0$ , точки  $q_1, q_2, \dots, q_h$  образуют решение проблемы обращения Якоби вида:

$$\sum_{j=1}^h \int_{q'}^{q_j} \varphi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \varphi_\nu(t) \text{ (по модулю периодов), } \nu = 1, 2, \dots, h.$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана (14) имеет вид

$$f(q) \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left( \int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right), \quad (16)$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений  $a_1, a_2, \dots, a_h$ ,  $m_j$  – вполне определенные целые числа,  $f$  – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору  $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ . У функции  $\omega_{qq_0}$  (по перемещению  $q$ ) выбрана фиксированная в  $S \setminus \bigcup_{k=1}^h a_k$  ветвь, исчезающая в точке  $q_0$ .

Обозначим через  $l_0$  и  $l'_0$  число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на  $S$ , кратных соответственно дивизорам  $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$  и  $D_0AB$ . Через  $P$  обозначим целый дивизор порядка  $l'_0$  с носителем в  $S \setminus \Gamma_0$  такой, что не существует абелевых дифференциалов на  $S$ , кратных дивизору  $D_0ABP$  и отличных от тождественного нуля. Для построения решения неоднородной задачи (14) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору  $D_0^{-1}P^{-1}$ . Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора  $P$ . Ее частным решением является функция вида (см. [4])

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (17)$$

где  $X_0$  – функция вида (16) при  $f = 1$ ,  $A_1(t, q)$  – мероморфный аналог ядра Коши на  $S$  с характеристическим дивизором  $\Delta_1$ , который получается делением дивизора  $D_0ABP$  на некоторый целый дивизор. Функция (17) будет решением задачи (14) в том и только в том случае, если  $g$  удовлетворяет  $l'_0$  условиям, обеспечивающим кратность функции (17) дивизору  $D^{-1}$ . Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (14) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0, \quad (18)$$

где  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, l'_0$ , – базис пространства абелевых дифференциалов на  $S$ , кратных дивизору  $D_0AB$ .

При выполнении условия (18) общее решение задачи (14) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left( \int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right) + \\ + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad q \in S. \quad (19)$$

Для того чтобы эта функция определяла решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (15).

Обозначим через  $f_1, f_2, \dots, f_{l_0}$  базис пространства мероморфных функций на  $S$ , кратных дивизору  $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ . Тогда функция  $F_0$  может быть записана в виде

$$F_0(q) = X_0(q) \sum_{k=1}^{l_0} c_k f_k(q) + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (20)$$

где  $c_k$  — произвольные комплексные числа.

В каждой компоненте множества  $S \setminus \overline{E_0}$  выберем точку  $s_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , такую, что  $z(s_j) \neq \infty$  и функции  $X_0(q)$ ,  $f_k(q)$ ,  $A_1(t, q)$  голоморфны по  $q$  в точках  $s_j$  и  $j_S(s_j)$ . Разложим функции  $X_0 f_k$  и  $(X_0 f_k) \circ j_S$  в ряд Тейлора по степеням  $z(q) - z(s_j)$ :

$$X_0(q) f_k(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{jik} (z(q) - z(s_j))^i, \quad X_0(j_S(q)) f_k(j_S(q)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{jik} (z(q) - z(s_j))^i.$$

Аналогично в окрестности точки  $q = s_j$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{X_0(q) A_1(t, q)}{2\pi i X_0^+(t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{ji}(t) (z(q) - z(s_j))^i, \\ \frac{X_0(j_S(q)) A_1(t, j_S(q))}{2\pi i X_0^+(t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{ji}(t) (z(q) - z(s_j))^i. \end{aligned}$$

В силу этих разложений равенство (15) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l_0} (a_{jik} - b_{jik}) c_k = - \int_{\Gamma_0} g(\alpha(t)) (\gamma_{ji}(t) - \delta_{ji}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Полагая

$$U = \begin{pmatrix} a_{101} - b_{101} & a_{102} - b_{102} & \dots & a_{10l_0} - b_{10l_0} \\ a_{201} - b_{201} & a_{202} - b_{202} & \dots & a_{20l_0} - b_{20l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m01} - b_{m01} & a_{m02} - b_{m02} & \dots & a_{m0l_0} - b_{m0l_0} \\ a_{111} - b_{111} & a_{112} - b_{112} & \dots & a_{11l_0} - b_{11l_0} \\ a_{211} - b_{211} & a_{212} - b_{212} & \dots & a_{21l_0} - b_{21l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m11} - b_{m11} & a_{m12} - b_{m12} & \dots & a_{m1l_0} - b_{m1l_0} \\ a_{121} - b_{121} & a_{122} - b_{122} & \dots & a_{12l_0} - b_{12l_0} \\ a_{221} - b_{221} & a_{222} - b_{222} & \dots & a_{22l_0} - b_{22l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m21} - b_{m21} & a_{m22} - b_{m22} & \dots & a_{m2l_0} - b_{m2l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

$\beta_{ji} = -(\gamma_{ji} - \delta_{ji}) \circ \alpha^{-1}$ ,  $\beta = (\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{m0}, \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{m1}, \beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{m2}, \dots)^t =$   
 $=: (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)^t$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{l_0})^t$ , перепишем систему (21) в виде

$$Uc = \int_{\Gamma} g\beta. \quad (22)$$

Обозначим через  $r$  ранг матрицы  $U$ . Пусть  $V$  – невырожденная квадратная матрица порядка  $r$ , составленная из элементов матрицы  $U$ , стоящих на пересечении строк с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_r$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ ) и столбцов с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_r$  ( $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ ),  $V_i$  – квадратная матрица порядка  $r+1$ , состоящая из элементов расширенной матрицы  $\left( U, \int_{\Gamma} g\beta \right)$ , стоящих на пересечении строк с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_r, i$  и столбцов с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_r, l_0+1$ . Тогда

$$\det V_i = \int_{\Gamma} g\lambda_i,$$

где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^r V_{i,i_n} \beta_{i_n} + V_{i,i} \beta_i,$$

$V_{i,j}$  – алгебраическое дополнение элемента  $\int_{\Gamma} g\beta_j$  матрицы  $V_i$ ,  $V_{i,i} = \det V$ ,  $\lambda_i = 0$  при  $i = i_1, i_2, \dots, i_r$ . Условия разрешимости системы (22) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq i_1, i_2, \dots, i_r. \quad (23)$$

При выполнении условий (23) величины  $c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r}$  выражаются линейно через  $\int_{\Gamma} g\beta_i$ ,  $i = i_1, i_2, \dots, i_r$ , то есть являются ограниченными линейными функционалами от функции  $g$  в пространстве  $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ , а остальные числа  $c_k$  остаются произвольными.

Условия (18) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma} g \frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0. \quad (24)$$

Если функция  $g$  удовлетворяет условиям (23) и (24), то функция  $F_0$ , задаваемая соотношением (20), определяет решение  $F$  задачи (1) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E, \\ F_0(p), \quad z(p) = z(q), & q \in R \setminus E, \quad p \in S \setminus E_0. \end{cases} \quad (25)$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.** Для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (23) и (24). При их выполнении решение задачи определяется равенствами (20) и (25), причем в равенстве (20)  $r$  величины среди  $c_k$  являются линейными ограниченными функционалами от  $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ , а остальные – произвольными. Однородная задача Римана (1) имеет  $l_0 - r$  линейно независимых решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-12188-офи\_м).

## Summary

*N.A. Barieva, I.A. Bikchantaev.* Riemann Problem on a Two-sheeted Surface of a Class  $O_{A^0B}$ .

Solvability conditions and explicit solution of the Riemann boundary value problem were derived by I.A. Bikchantaev on the case of ultrahyperelliptic surface (Riemann problem on ultrahyperelliptic surface // Russian Math. – 2000. – V. 44, No 2. – P. 17–29). The present paper generalizes the last result on the case of two-sheeted Riemann surface of the class  $O_{A^0B}$ .

**Key words:** boundary value problems, Riemann surfaces.

## Литература

1. *Sario L., Nakai M.* Classification theory of open Riemann surfaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 446 p.
2. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высш. шк., 1991. – 208 с.
3. *Бикчантаев И.А.* Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31.
4. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Усп. матем. наук. – 1971. Т. 26, № 1. – С. 113–179.

Поступила в редакцию  
30.01.09

---

**Бариева Наиля Ахмедовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

**Бикчантаев Ильдар Ахмедович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *ibikchan@ksu.ru*